

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ВЛАДИВОСТОКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рабочая программа дисциплины (модуля)  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДУЛЬ 1**

Направление и направленность (профиль)  
01.03.04 Прикладная математика. Цифровая экономика

Год набора на ОПОП  
2023

Форма обучения  
очная

Владивосток 2023

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Математический анализ модуль 1» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика (утв. приказом Минобрнауки России от 10.01.2018г. №11) и Порядком организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утв. приказом Минобрнауки России от 06.04.2021 г. N245).

Составитель(и):

*Галимзянова К.Н., кандидат физико-математических наук, доцент, Кафедра математики и моделирования, Kseniya.Galimzyanova@vvsu.ru*

Утверждена на заседании кафедры математики и моделирования от 18.05.2023 , протокол № 7

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий кафедрой (разработчика)

Мазелис Л.С.

<b>ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ</b>	
Сертификат	1575656200
Номер транзакции	0000000000BB4716
Владелец	Мазелис Л.С.

## 1 Цель, планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)

Целями освоения дисциплины «Математический анализ модуль 1» являются изучение основных математических понятий, их взаимосвязи и развития, а также отвечающих им методов расчёта, используемых для анализа, моделирования и решения прикладных задач.

Задачи освоения дисциплины: развитие алгоритмического и логического мышления студентов, овладение методами исследования и решения математических задач, выработка у студентов умения самостоятельно расширять свои математические знания и проводить математический анализ прикладных инженерных задач.

Планируемыми результатами обучения по дисциплине (модулю), являются знания, умения, навыки. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы, представлен в таблице 1.

Таблица 1 – Компетенции, формируемые в результате изучения дисциплины (модуля)

Название ОПОП ВО, сокращенное	Код и формулировка компетенции	Код и формулировка индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	
			Код результата	Формулировка результата
01.03.04 «Прикладная математика» (Б-ПМ)				

## 2 Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП

Дисциплина «Математический анализ модуль 1» относится к базовой части «Блока 1 Дисциплины (модули)» учебного плана направления 01.03.04 Прикладная математика.

## 3. Объем дисциплины (модуля)

Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу с обучающимися (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу, приведен в таблице 2.

Таблица 2 – Общая трудоемкость дисциплины

Название ОПОП ВО	Форма обучения	Часть УП	Семестр (ОФО) или курс (ЗФО, ОЗФО)	Трудоемкость (З.Е.)	Объем контактной работы (час)					СРС	Форма аттестации	
					Всего	Аудиторная			Внеаудиторная			
						лек.	прак.	лаб.	ПА			КСР
01.03.04 Прикладная математика	ОФО	Б1.Б	1	4	73	36	36	0	1	0	71	Э

## 4 Структура и содержание дисциплины (модуля)

### 4.1 Структура дисциплины (модуля) для ОФО

Тематический план, отражающий содержание дисциплины (перечень разделов и тем),

структурированное по видам учебных занятий с указанием их объемов в соответствии с учебным планом, приведен в таблице 3.1

Таблица 3.1 – Разделы дисциплины (модуля), виды учебной деятельности и формы текущего контроля для ОФО

№	Название темы	Код результата обучения	Кол-во часов, отведенное на				Форма текущего контроля
			Лек	Практ	Лаб	СРС	
1	Предел функции	РД1, РД2, РД3	6	12	0	20	собеседование, тест
2	Непрерывность функции	РД1, РД2, РД3	2	2	0	13	собеседование, тест
3	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	РД1, РД2, РД3	3	9	0	14	собеседование, тест
4	Применение дифференциального исчисления к исследованию функции и построения графика функции	РД1, РД2, РД3	2	3	0	20	собеседование, тест
5	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	РД1, РД2, РД3	4	8	0	14	собеседование, тест
6	Скалярное поле	РД1, РД2, РД3	1	2	0	8	собеседование, тест
<b>Итого по таблице</b>			<b>18</b>	<b>36</b>	<b>0</b>	<b>89</b>	

#### 4.2 Содержание разделов и тем дисциплины (модуля) для ОФО

##### *Тема 1 Предел функции.*

Содержание темы: крестность точки.  $\varepsilon$ -окрестность точки. Проколота окрестность точки. Окрестность бесконечности.  $\varepsilon$ -окрестность бесконечности. Множества, ограниченные сверху и снизу. Ограниченные множества. Примеры множеств, ограниченных сверху и снизу, ограниченных множеств. Открытые и замкнутые множества. Функция, ограниченная в точке и на множестве. Примеры функций, ограниченных в точке и на множестве. Неограниченные множества и функции. Определение предела функции. Геометрический смысл предела функции. Свойства предела функции: предел константы, пределы суммы, разности, произведения, частного двух функций. Односторонние пределы. Определение бесконечно малой, ограниченной, бесконечно большой функций. Свойства бесконечно малых и ограниченных функций. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями. Теорема о зажатой переменной. Первый и второй замечательные пределы. Вычисление пределов функций. Вычисление односторонних пределов. Раскрытие различных видов неопределенностей. Бесконечно малые функции одного и того же порядка. Эквивалентные бесконечно малые функции. Бесконечно малая функция более высокого и более низкого порядков, чем другая бесконечно малая функция. Несравнимые бесконечно малые функции. Теоремы об эквивалентных бесконечно малых функциях. Применение свойств эквивалентных бесконечно малых функций к вычислению пределов.

Формы и методы проведения занятий по теме, применяемые образовательные технологии: стандартная, «Метод кооперативного обучения».

Виды самостоятельной подготовки студентов по теме: индивидуальное домашнее задание.

##### *Тема 2 Непрерывность функции.*

Содержание темы: Определение функции, непрерывной в точке. Свойства функций, непрерывных в одной и той же точке. Сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных в одной и той же точке функций. Непрерывность сложной функции. Классификация точек разрыва. Скачок функции в точке разрыва первого рода. До

определение функции до непрерывности в точке устранимого разрыва. Определение функции, непрерывной на отрезке. Исследование элементарных и не элементарных функций на непрерывность, установление характера разрыва. Геометрическая иллюстрация.

Формы и методы проведения занятий по теме, применяемые образовательные технологии: стандартная, «Метод кооперативного обучения».

Виды самостоятельной подготовки студентов по теме: индивидуальное домашнее задание.

### *Тема 3 Дифференциальное исчисление функций одной переменной.*

Содержание темы: Определение производной функции. Геометрический смысл производной функции. Угловой коэффициент касательной к графику функции. Физический смысл производной функции. Производная константы. Производная суммы, разности, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Таблица производных основных элементарных функций. Связь непрерывности и дифференцируемости функции. Производная сложной функции. Таблица производных основных элементарных функций. Производные высших порядков. Физический смысл производной второго порядка Производная функции, заданной неявно. Производные высших порядков функции, заданной неявно. Логарифмическое дифференцирование. Производная функции, заданной параметрически. Производные высших порядков функции, заданной параметрически. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, Ферма. Правило Лопиталья. Применение правила Лопиталья к раскрытию основных неопределённостей. Определение дифференциала функции. Свойства дифференциала функции. Инвариантность дифференциала функции. Дифференциалы высших порядков. Теорема о связи существования производной и дифференциала функции в точке.

Формы и методы проведения занятий по теме, применяемые образовательные технологии: стандартная, «Метод кооперативного обучения».

Виды самостоятельной подготовки студентов по теме: индивидуальное домашнее задание.

### *Тема 4 Применение дифференциального исчисления к исследованию функции и построения графика функции.*

Содержание темы: Определение возрастающей (убывающей) на интервале функции. Интервалы монотонности функции. Необходимое условие монотонности функции. Достаточное условие монотонности функции. Экстремумы функции. Необходимое условие экстремума. Два достаточных условия экстремума. Точки перегиба. Выпуклость и вогнутость графика функции на интервале. Необходимое и достаточное условия существования точки перегиба. Достаточное условие выпуклости и вогнутости графика функции. Асимптоты графика функции: вертикальные и неvertикальные. Развёрнутый план исследования функции.

Формы и методы проведения занятий по теме, применяемые образовательные технологии: стандартная, «Метод кооперативного обучения».

Виды самостоятельной подготовки студентов по теме: индивидуальное домашнее задание.

### *Тема 5 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.*

Содержание темы: Область определения функций нескольких переменных. Окрестность точки на плоскости. Окрестность бесконечности на плоскости. Окрестность точки в пространстве. Окрестность бесконечности в пространстве. Линии и поверхности уровня функций двух и трёх переменных. Окрестность точки в пространстве. Предел функции двух и трёх переменных. Непрерывность в точке и в ограниченной замкнутой области. Частные приращения функции. Частные производные функции. Частные производные высших порядков. Полное приращение функции двух и трёх переменных. Определение полного дифференциала. Теорема о связи существования полного

дифференциала и частных производных функции. Полные дифференциалы высших порядков. Дифференцирование сложных функций. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума функции нескольких переменных. Достаточное условие экстремума функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных, непрерывной в ограниченной замкнутой области.

Формы и методы проведения занятий по теме, применяемые образовательные технологии: стандартная, «Метод кооперативного обучения».

Виды самостоятельной подготовки студентов по теме: индивидуальное домашнее задание.

#### *Тема 6 Скалярное поле.*

Содержание темы: Понятие скалярного поля. Функция поля. Определение градиента функции, его геометрический смысл. Определение производной по направлению, её геометрический смысл. Вывод формулы производной по направлению. Теорема о связи градиента и производной по направлению.

Формы и методы проведения занятий по теме, применяемые образовательные технологии: стандартная, «Метод кооперативного обучения».

Виды самостоятельной подготовки студентов по теме: индивидуальное домашнее задание.

## **5 Методические указания для обучающихся по изучению и реализации дисциплины (модуля)**

### **5.1 Методические рекомендации обучающимся по изучению дисциплины и по обеспечению самостоятельной работы**

При реализации дисциплины (модуля) применяется электронный учебный курс, размещённый в системе электронного обучения (Moodle).

Для обеспечения систематической и регулярной работы по изучению дисциплины и успешного прохождения текущих и промежуточных контрольных испытаний студенту рекомендуется придерживаться следующего порядка обучения:

- самостоятельно определить объем времени, необходимого для проработки каждой темы;
- регулярно изучать каждую тему дисциплины, используя различные формы индивидуальной работы;
- согласовывать с преподавателем виды работы по изучению дисциплины.

При выполнении индивидуальных домашних заданий необходимо использовать теоретический материал, делать ссылки на соответствующие теоремы, свойства, формулы и др. Решение ИДЗ выполняется подробно и содержит необходимые пояснительные ссылки.

Самостоятельность в учебной работе способствует развитию заинтересованности студента в изучаемом материале, вырабатывает у него умение и потребность самостоятельно получать знания, что весьма важно для специалиста с высшим образованием.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа студента включает следующие виды, выполняемые в соответствии с ФГОС ВО и рабочим учебным планом:

- аудиторная самостоятельная работа студента под руководством и контролем преподавателя на лекции. При проведении практических занятиях применяется «Метод кооперативного обучения»: студенты работают в малых группах (3 – 4 чел.) над индивидуальными заданиями, в процессе выполнения которых они могут совещаться друг к другу. Преподаватель, в свою очередь, наблюдает за работой малых групп, а также

поочередно разъясняет новый учебный материал малым группам, которые закончили работать над индивидуальными заданиями по предыдущему материалу;

- внеаудиторная самостоятельная работа студента: изучение теоретического материала, подготовка к аудиторным занятиям (лекция, практическое занятие, контрольная работа, тестирование, теоретический опрос), дополнительные занятия, текущие консультации по дисциплине.

В качестве самостоятельной работы предполагается изучение некоторых разделов дисциплины:

- «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» (определение производной функции. Геометрический смысл производной функции. Угловой коэффициент касательной к графику функции. Физический смысл производной функции. Производная константы. Производная суммы, разности, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Таблица производных основных элементарных функций. Производные высших порядков. Физический смысл производной второго порядка);

- «Применение дифференциального исчисления к исследованию функции и построения графика функции» (определение возрастающей (убывающей) на интервале функции. Интервалы монотонности функции. Необходимое условие монотонности функции. Достаточное условие монотонности функции. Экстремумы функции. Необходимое условие экстремума).

Контроль успеваемости осуществляется в соответствии с рейтинговой системой оценки знаний студентов. Оценка по дисциплине определяется по 100-бальной шкале как сумма баллов, набранных студентом в результате работы в семестре: обязательными баллами оценивается посещение лекционных занятий, работа на практических (семинарских) занятиях, теоретический опрос, тесты, выполнение контрольных работ, ИДЗ, предусмотренных учебным планом.

Распределение баллов доводится до студентов в начале семестра. Учебным планом предусмотрены консультации, которые студент может посещать по желанию. При реализации дисциплины (модуля) применяется электронный учебный курс, размещённый в системе электронного обучения Moodle.

## **5.2 Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов**

При необходимости обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов (по заявлению обучающегося) предоставляется учебная информация в доступных формах с учетом их индивидуальных психофизических особенностей:

- для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания, консультации и др.

- для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания, консультации и др.

- для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; индивидуальные задания, консультации и др.

## **6 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)**

В соответствии с требованиями ФГОС ВО для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю) созданы фонды оценочных средств. Типовые контрольные задания, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков,

а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 1.

## **7 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

### **7.1 Основная литература**

1. Львовский, С. М. Основы математического анализа : учебник : [16+] / С. М. Львовский. – Москва : Издательский дом Высшей школы экономики, 2021. – 368 с. : ил., табл. – (Учебники Высшей школы экономики). – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=699485> (дата обращения: 03.05.2023). – ISBN 978-5-7598-1183-1 (в пер.). – ISBN 978-5-7598-2405-3 (e-book). – DOI 10.17323/978-5-7598-1183-1. – Текст : электронный.
2. Математический анализ : учеб. пособие (практикум) / Е.П. Ярцева .— Ставрополь : изд-во СКФУ, 2018 .— 340 с. — URL: <https://lib.rucont.ru/efd/705236> (дата обращения: 16.02.2024)
3. Павлов, Д. А. Математический анализ: дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной : учебник / Д. А. Павлов, Н. П. Орлянская. — Краснодар : КубГАУ, 2019. — 180 с. — ISBN 978-5-907294-15-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/254264> (дата обращения: 28.02.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Халилова, Л. Г. Пределы и числовые ряды : учебное пособие / Л. Г. Халилова. — Москва : РУТ (МИИТ), 2020. — 200 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/175822> (дата обращения: 28.02.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

### **7.2 Дополнительная литература**

1. Берман, Г. Н., Сборник задач по курсу математического анализа (РЕПРИНТ) : учебное пособие / Г. Н. Берман. — Москва : Транспортная компания, 2021. — 432 с. — ISBN 978-5-4365-5382-5. — URL: <https://book.ru/book/936693> (дата обращения: 26.02.2024). — Текст : электронный.
2. Корчагина, Е. В. Математический анализ : учебное пособие / Е. В. Корчагина, Н. А. Андреева. - Воронеж : Воронежский институт ФСИН России, 2019. - 187 с. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1086245> (дата обращения: 26.02.2024).
3. Математический анализ и дифференциальные уравнения : сборник задач / Беришвили О.Н.; Плотникова С.В. — Кинель : РИО СамГАУ, 2019 .— 106 с. — URL: <https://lib.rucont.ru/efd/685644> (дата обращения: 16.02.2024)
4. Никитин, А. А. Математический анализ. Сборник задач : учебное пособие для вузов / А. А. Никитин. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 353 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8585-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/511120> (дата обращения: 27.02.2024).

### **7.3 Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", включая профессиональные базы данных и информационно-справочные системы (при необходимости):**

1. Образовательная платформа "ЮРАЙТ"
2. Электронно-библиотечная система "BOOK.ru"
3. Электронно-библиотечная система "ZNANIUM.COM"
4. Электронно-библиотечная система "ЛАНЬ"
5. Электронно-библиотечная система "РУКОНТ"

6. Электронно-библиотечная система "УНИВЕРСИТЕТСКАЯ БИБЛИОТЕКА ОНЛАЙН"

7. Open Academic Journals Index (ОАИ). Профессиональная база данных - Режим доступа: <http://oaji.net/>

8. Президентская библиотека им. Б.Н.Ельцина (база данных различных профессиональных областей) - Режим доступа: <https://www.prlib.ru/>

9. Информационно-справочная система "Консультант Плюс" - Режим доступа: <http://www.consultant.ru/>

**8 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения**

Основное оборудование:

· Мульти-медийный комплект № 2: Проектор Panasonic PT-LX26HE, потолочное крепление Tuarex Corsa, клеммный модуль Kramer WX -1N, коннектор VGA, экран Lumien Escopicture

Программное обеспечение:

- Adobe Acrobat X Pro
- Adobe Flash Player
- Microsoft Office2007 File Format Converter Russian
- Windows

## Контрольная работа №1

### 1. Найти пределы функций.

$$1.1 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x}{3x - 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{10x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x-1} \right)^x.$$

$$1.2 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\arcsin 2x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3x+2} \right)^x.$$

$$1.3 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x - 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 9x}{x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+1}{4x} \right)^{2x}.$$

$$1.4 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^4 - x + 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 7x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$1.5 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 5}{5x^2 - x - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{5x^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x).$$

$$1.6 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + x + 5x^4}{x^4 - 12x + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)(\ln(x+3) - \ln x).$$

$$1.7 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 6x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-5)(\ln(x-3) - \ln x).$$

$$1.8 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{5}}{x-3};$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} (7 - 6x)^{\frac{1}{3x-3}}. \\
 1.9 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 5x}; \\
 \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \cdot \operatorname{tg} 2x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{2x}{x^2-4}}. \\
 1.10 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 3x^2 + 9}{2x^5 + 2x^2 + 5}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{2x} - 2}; \\
 \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} 5x \cdot \operatorname{ctg} 4x; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{2}{x-3}}.
 \end{array}$$

**2. Исследовать функции на непрерывность и сделать схематический чертёж.**

$$2.1 \text{ а) } y = \begin{cases} x+4 & \text{при } x < -1, \\ x^2 + 2 & \text{при } -1 \leq x < 1, \\ 2x & \text{при } x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } y = 9^{\frac{1}{2-x}} \text{ в точках } x = 0, x = 2.$$

$$2.2 \text{ а) } y = \begin{cases} x+2 & \text{при } x \leq -1, \\ x^2 + 1 & \text{при } -1 < x \leq 1, \\ -x+3 & \text{при } x > 1. \end{cases} \quad \text{б) } y = 4^{\frac{1}{3-x}} \text{ в точках } x = 1, x = 3.$$

$$2.3 \text{ а) } y = \begin{cases} -x & \text{при } x \leq 0, \\ -(x-1)^2 & \text{при } 0 < x < 2, \\ x-3 & \text{при } x \geq 2. \end{cases} \quad \text{б) } y = 12^{\frac{1}{x}} \text{ в точках } x = 0, x = 2.$$

$$2.4 \text{ а) } y = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 + 1 & \text{при } 0 < x < 1, \\ x & \text{при } x \geq 1, \end{cases} \quad \text{б) } y = 3^{\frac{1}{4-x}} \text{ в точках } x = 2, x = 4.$$

$$2.5 \text{ а) } y = \begin{cases} -x & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ x+1 & \text{при } x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } y = 8^{\frac{1}{5-x}} \text{ в точках } x = 3, x = 5.$$

$$2.6 \text{ а) } y = \begin{cases} -x & \text{при } x < 0, \\ \sin x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ x-2 & \text{при } x > \pi. \end{cases} \quad \text{б) } y = 10^{\frac{1}{7-x}} \text{ в точках } x = 5, x = 7.$$

$$2.7 \text{ а) } y = \begin{cases} -(x+1) & \text{при } x \leq -1, \\ (x+1)^2 & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ x & \text{при } x > 0; \end{cases} \quad \text{б) } y = 14^{\frac{1}{6-x}} \text{ в точках } x = 4, x = 6.$$

$$2.8 \text{ а) } y = \begin{cases} -x^2 & \text{при } x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2 & \text{при } x > \frac{\pi}{4}; \end{cases} \quad \text{б) } y = 15^{\frac{1}{8-x}} \text{ в точках } x = 6, x = 8.$$

$$2.9 \text{ а) } y = \begin{cases} -2x & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 + 1 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 2 & \text{при } x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } y = 11^{\frac{1}{4+x}} \text{ в точках } x = -4, x = -2.$$

$$2.10 \text{ а) } y = \begin{cases} -2x & \text{при } x \leq 0, \\ \sqrt{x} & \text{при } 0 < x < 4, \\ 1 & \text{при } x \geq 4; \end{cases} \quad \text{б) } y = 13^{\frac{1}{5+x}} \text{ в точках } x = -5, x = -3.$$

### 3. Исследовать функции и построить их графики

$$3.1 \text{ а) } y = \frac{1-x^3}{x^2}; \quad \text{б) } y = (2x+3)e^{-2(x+1)}.$$

$$3.2 \text{ а) } y = \frac{x^2-x+1}{x-1}; \quad \text{б) } y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}.$$

$$3.3 \text{ а) } y = \frac{2}{x^2+2x}; \quad \text{б) } y = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1.$$

$$3.4 \text{ а) } y = \frac{4x^2+9}{4x+8}; \quad \text{б) } y = (3-x)e^{x-2}.$$

$$3.5 \text{ а) } y = \frac{12x}{9+x^2}; \quad \text{б) } y = \frac{e^{2-x}}{2-x}.$$

$$3.6 \text{ а) } y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}; \quad \text{б) } y = \ln \frac{x}{x+2} + 1.$$

$$3.7 \text{ а) } y = \frac{4-x^3}{x^2}; \quad \text{б) } y = (x-2)e^{3-x}.$$

$$3.8 \text{ а) } y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}; \quad \text{б) } y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}.$$

$$3.9 \text{ а) } y = \frac{2x^3+1}{x^2}; \quad \text{б) } y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x+4}.$$

$$3.10 \text{ а) } y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}; \quad \text{б) } y = -(2x + 1)e^{2(x+1)}.$$

4. Дана функция  $z = f(x, y)$ . Проверить, удовлетворяет или нет эта функция уравнению.

$$4.1 \quad z = e^{\frac{y}{x}}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) - y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.2 \quad z = e^{xy}; \quad x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.3 \quad z = e^{-\cos(ax+y)}; \quad a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$4.4 \quad z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.5 \quad z = \sin^2(y - ax); \quad a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$4.6 \quad z = \frac{y}{x}; \quad x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$4.7 \quad z = y\sqrt{\frac{y}{x}}; \quad x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.8 \quad z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.9 \quad z = \frac{\sin(x - y)}{x}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) - x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.10 \quad z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}; \quad \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области.

$$5.1 \quad z = x^2 + y^2 - xy + x + y; \quad D: x=0, y=0, \quad x+y=-3.$$

$$5.2 \quad z = 2x + y - xy; \quad D: 0 \leq x \leq 4; \quad 0 \leq y \leq 4.$$

$$5.3 \quad z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1; \quad D: x=0; \quad y=0; \quad x+y=3.$$

$$5.4 \quad z = x^3 + y^3 - 3xy; \quad D: 0 \leq x \leq 2; \quad 0 \leq y \leq 3.$$

$$5.5 \quad z = xy; \quad D: x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$5.6 \quad z = x^2 + 3y^2 + x - y; \quad D: x=1; \quad y=1; \quad x+y=1.$$

$$5.7 \quad z = x^2 - xy + y^2 - 4x; \quad D: x=0; \quad y=0; \quad 2x+3y-14=0.$$

5.8  $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ ;  $D: y = \frac{1}{3}x^2$ ;  $y = 3$ .

5.9  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ ;  $D: x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $x = 1$ ;  $y = 2$ .

5.10  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ ;  $D: y = 1$ ;  $y = -1$ ;  $x = 0$ ;  $x = 2$ .

**6. Исследовать функцию на экстремум.**

6.1  $z = x^3 + y^2 - 4x - xy + 6y$ .

6.2  $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ .

6.3  $z = x^3 + y^3 - 15xy$ .

6.4  $z = x^2 - xy + y^2 - 5x + y$ .

6.5  $z = (x - 1)^2 + 2y^2$ .

6.6  $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ .

6.7  $z = 5x^2 - 2xy + y^2 + 4$ .

6.8  $z = \frac{1}{2}xy + 3x^2 - y^2 + 3$ .

6.9  $z = (x - 1)^2 - 2y^2$ .

6.10  $z = 1 - xy - 3x^2 - y^2 + 11x$ .

7. Даны: функция  $z = z(x, y)$ , точка  $A$  и вектор  $\bar{a}$ .

Найти 1)  $\overrightarrow{\text{grad}} z$  в точке  $A$ ;

2) производную в точке  $A$  по направлению вектора  $\bar{a}$ .

7.1  $z = \ln(5x + 3y)$ ;  $A(2; 2)$ ;  $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ .

7.2  $z = \arctg \frac{y^2}{x}$ ;  $A(2; 1)$ ;  $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ .

7.3  $z = \frac{xy}{x - y}$ ;  $A(2; 1)$ ;  $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$ .

7.4  $z = 2x^4 + 8x^2y^3$ ;  $A(2; -1)$ ;  $\bar{a} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$ .

7.5  $z = \ln(2x^2 + y^3)$ ;  $A(3; -1)$ ;  $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j}$ .

7.6  $z = \arctg \frac{x}{y^2}$ ;  $A(3; 1)$ ;  $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$ .

7.7  $z = 2x^2 + 3xy + 4y^2$ ;  $A(2; -2)$ ;  $\bar{a} = \bar{i} - 3\bar{j}$ .

**7.8**  $z = \ln(3x^2 + 5y^2)$ ,  $A(2;3)$ ,  $\bar{a} = -4\bar{i} + 3\bar{j}$ .

**7.9**  $z = 2x^3y + 3x^2y^2$ ;  $A(1;-2)$ ,  $\bar{a} = 6\bar{i} - 8\bar{j}$ .

**7.10**  $z = \ln(5x + 3y)$ ,  $A(2;2)$ ,  $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ .